

Le cas le plus simple

Les formulations en espace de chemins du transfert radiatif font intervenir des différences entre la fonction de Planck au début du chemin et la fonction de Planck à la fin du chemin. Si on note θ la température de la matière au début du chemin γ et θ_γ la température de la matière à la fin du chemin et si on admet que la matière est grise (ses propriétés radiatives sont indépendantes de la fréquence), alors on voit apparaître la différence $\sigma\theta^4 - \sigma\theta_\gamma^4$, où $\sigma \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann.

Ce que l'on appelle alors *la linéarisation du transfert radiatif* consiste à remplacer la fonction $f(x) = x^4$ par son développement de Taylor à l'ordre un autour d'une valeur de référence θ_{ref} , soit

$$f(x) \approx \theta_{ref}^4 + 4\theta_{ref}^3(x - \theta_{ref}) \quad (1)$$

pour écrire

$$\sigma\theta^4 - \sigma\theta_\gamma^4 \approx \sigma\theta_{ref}^4 + 4\sigma\theta_{ref}^3(\theta - \theta_{ref}) - \sigma\theta_{ref}^4 + 4\sigma\theta_{ref}^3(\theta_\gamma - \theta_{ref}) \quad (2)$$

soit

$$\sigma\theta^4 - \sigma\theta_\gamma^4 \approx 4\sigma\theta_{ref}^3(\theta - \theta_\gamma) \quad (3)$$

Continuité des flux à une interface solide-fluide

En thermique statistique, la première fois que l'on croise cette linéarisation, c'est lors de la traduction statistique de la continuité des flux à l'interface entre un solide opaque et un fluide transparent. Initialement, cette continuité s'écrit

$$-\lambda \vec{\text{grad}}\theta \cdot \vec{n} = h(\theta - \theta_f) + \epsilon \int_{\mathcal{U}_\Gamma} p_\Gamma(\gamma) d\gamma (\sigma\theta^4 - \sigma\theta_\gamma^4) \quad (4)$$

où θ est la température sur solide à l'interface, λ la conductivité thermique du solide, \vec{n} le vecteur unitaire normal à l'interface (orienté du solide vers le fluide), h le coefficient d'échange convectif, θ_f la température du fluide et ϵ l'émissivité hémisphérique de la surface. L'univers des chemins radiatif possibles est noté \mathcal{U}_Γ et la densité de probabilité de chaque chemin γ est notée $p_\Gamma(\gamma)$. Même si on admet que l'on connaît θ_f et chacun des θ_γ , cette équation de continuité ne suffit pas à déterminer la température d'interface θ car elle contient également le gradient de température dans le solide $\vec{\text{grad}}\theta$. Il faut donc penser conjointement avec l'équation qui régit la conduction thermique dans le solide.

Linéarisation du champ de température dans le solide

Mais on utilise souvent une première étape de linéarisation qui concerne la conduction thermique, où on définit θ_δ comme la température du solide à une distance δ de l'interface dans la direction $-\vec{n}$, pour écrire

$$-\lambda \vec{\text{grad}}\theta \cdot \vec{n} \approx \frac{\lambda}{\delta}(\theta_\delta - \theta) \quad (5)$$

On injecte alors cette approximation dans l'équation 4 pour obtenir

$$\frac{\lambda}{\delta}(\theta_\delta - \theta) \approx h(\theta - \theta_f) + \epsilon \int_{\mathcal{U}_\Gamma} p_\Gamma(\gamma) d\gamma (\sigma\theta^4 - \sigma\theta_\gamma^4) \quad (6)$$

Cette fois, si on admet que θ_δ , θ_f et θ_γ sont connus, on peut chercher à résoudre l'équation 6 pour exprimer formellement la température d'interface θ comme une fonction de ces trois températures. On peut notamment la ré-écrire sous la forme suivante,

$$\frac{\theta}{\theta_{cc}} + r \left(\frac{\theta}{\theta_{cc}} \right)^4 - \left(1 + r \left(\frac{\theta_r}{\theta_{cc}} \right)^4 \right) = 0 \quad (7)$$

Le *facteur de rayonnement* r est défini comme

$$r = \frac{\epsilon \sigma \theta_{cc}^3}{\frac{\lambda}{\delta} + h} \quad (8)$$

où θ_{cc} est la température conducto-convective, c'est à dire la valeur que prendrait la température de surface si il n'y avait pas de rayonnement (seulement la conduction et la convection) :

$$\theta_{cc} = \frac{\frac{\lambda}{\delta} \theta_\delta + h \theta_f}{\frac{\lambda}{\delta} + h} \quad (9)$$

θ_r est la *température de radiance*, i.e. le flux radiatif incident traduit par une température, celle du corps noir qui émettrait le même flux, soit

$$\theta_r = \left(\int_{\mathcal{U}_r} p_\Gamma(\gamma) d\gamma \theta_\gamma^4 \right)^{1/4} \quad (10)$$

A la limite $r \rightarrow 0$ seuls comptent la conduction et la convection :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \theta = \theta_{cc} \quad (11)$$

A la limite $r \rightarrow +\infty$ seul le rayonnement compte :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \theta = \theta_r \quad (12)$$

L'équation 7 est non-linéaire en θ , puisqu'elle implique θ^4 , mais en admettant que r , θ_{cc} et θ_r sont connus, elle est une équation quartique dont on peut trouver la solution assez facilement (voir ci-dessous).

On retiendra la forme suivante, où les chapeaux sur les températures indiquent que les températures ont été adimensionnée par θ_{cc} :

$$\check{\theta} + r \check{\theta}^4 - (1 + r \check{\theta}_r^4) = 0 \quad (13)$$

avec

$$\check{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{cc}} \quad (14)$$

$$\check{\theta}_r = \frac{\theta_r}{\theta_{cc}} \quad (15)$$

Linéarisation du rayonnement et écriture de θ comme une moyenne

Mais on peut aussi aller plus loin dans l'approximation en repartant de l'équation 6 et en utilisant la définition de la température de radiance θ_r de l'équation 10, soit

$$\frac{\lambda}{\delta}(\theta_\delta - \theta) \approx h(\theta - \theta_f) + \epsilon(\sigma\theta^4 - \sigma\theta_r^4) \quad (16)$$

pour ensuite injecter la linéarisation du transfert radiatif de l'équation 3, soit

$$\epsilon(\sigma\theta^4 - \sigma\theta_r^4) \approx h_r(\theta - \theta_r) \quad (17)$$

et ainsi obtenir

$$\frac{\lambda}{\delta}(\theta_\delta - \theta) \approx h(\theta - \theta_f) + h_r(\theta - \theta_r) \quad (18)$$

où

$$h_r = 4\epsilon\sigma\theta_{ref}^3 \quad (19)$$

est le *coefficient d'échange radiatif*.

Cette double approximation (profil de température linéarisé dans le solide, rayonnement linéarisé) est essentielle car elle permet d'écrire la température θ du solide à l'interface comme une moyenne. Pour les écritures impliquant la linéarisation du rayonnement, on utilise la notation θ_{lin} afin de distinguer la température obtenue de celle résultant de la solution exacte :

$$\theta_{lin} = \frac{\frac{\lambda}{\delta}\theta_\delta + h\theta_f + h_r\theta_r}{\frac{\lambda}{\delta} + h + h_r} \quad (20)$$

soit

$$\theta_{lin} = P_{cond} \theta_\delta + P_{conv} \theta_f + P_r \theta_r \quad (21)$$

avec

$$P_{cond} = \frac{\frac{\lambda}{\delta}}{\frac{\lambda}{\delta} + h + h_r} \quad (22)$$

$$P_{conv} = \frac{h}{\frac{\lambda}{\delta} + h + h_r} \quad (23)$$

$$P_r = \frac{h_r}{\frac{\lambda}{\delta} + h + h_r} \quad (24)$$

Ces trois grandeurs sont interprétables comme des probabilités et donc θ_{lin} est bien vue comme la moyenne des trois températures θ_δ (température à l'intérieur du solide à la distance δ), θ_f (température du fluide) et θ_r (température de radiance).

Avec les notations précédentes, on obtient

$$\theta_{lin} = (1 - P_r) \theta_{cc} + P_r \theta_r \quad (25)$$

et après adimensionnalisation,

$$\check{\theta}_{lin} = (1 - P_r) 1 + P_r \check{\theta}_r \quad (26)$$

où

$$P_r = \frac{4r\check{\theta}_{ref}^3}{1 + 4r\check{\theta}_{ref}^3} \quad (27)$$

et

$$\check{\theta}_{ref} = \frac{\theta_{ref}}{\theta_{cc}} \quad (28)$$

RQ : Il est très important de noter que dans ce qui précède, lors de la linéarisation du rayonnement, nous avons raisonné comme si θ_r était connu. Or θ_r est défini par l'équation 10, impliquant une intégration sur l'espace des chemins radiatifs. Cette intégration est souvent non triviale et θ_r n'est pas connu directement. La linéarisation du transfert radiatif est alors appliquée avant l'introduction de θ_r , c'est à dire dans l'équation 6, A la place de l'équation 17, on écrit pour chaque chemin γ

$$\epsilon(\sigma\theta^4 - \sigma\theta_\gamma^4) \approx h_r(\theta - \theta_\gamma) \quad (29)$$

Dans les raisonnements qui suivent, cette différence jouera un rôle essentiel. Mais au stade actuel nous continuons à avancer comme si θ_r était connu, donc avec une linéarisation qui se résume à l'équation 17

Comment estimer l'erreur liée à la linéarisation du rayonnement ?

Nous laissons ici de côté la question de la linéarisation du profil de température dans le solide. Notre point de départ est donc l'équation 6. La question que nous pouvons alors nous poser est la suivante : quelle erreur commettons-nous en passant de l'équation 6 à l'équation 21 ?

La solution exacte

Nous avons vu que l'équation 6 peut se ré-écrire sous la forme de l'équation 13 qui est une équation quartique. Nous pouvons donc utiliser une des solutions existantes pour résoudre ce type d'équation (équation polynomiale d'ordre quatre). La solution de Ferrari, combinée à la méthode de Cardan est décrite en commentaire. Elle conduit à la forme suivante :

$$\check{\theta} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2y} + \sqrt{-2y + \frac{2a}{\sqrt{2y}}} \right) \quad (30)$$

avec

$$y = u + v \quad (31)$$

$$u = \left(\frac{a^2}{16} + \sqrt{\frac{b^3}{27} + \left(\frac{a^2}{16} \right)^2} \right)^{1/3} \quad (32)$$

$$v = - \left(-\frac{a^2}{16} + \sqrt{\frac{b^3}{27} + \left(\frac{a^2}{16} \right)^2} \right)^{1/3} \quad (33)$$

Commentaire 1 - Solution de Ferrari

On doit trouver θ comme solution de l'équation 13 :

$$\check{\theta}^4 + a\check{\theta} - b = 0 \quad (30)$$

où a et b sont donnés par les équations 34 et 35. On se retrouve alors dans le cadre défini par Ferrari qui cherche à résoudre des équations de la forme

$$\check{\theta}^4 + p^*\check{\theta}^2 + q^*\check{\theta} + r^* = 0 \quad (31)$$

avec $p^* = 0$, $q^* = a$ et $r^* = -b$.

RQ : Ferrari se donne une équation sans ordre 3 car il est très facile d'éliminer l'ordre 3 avec un changement de variable du type $\check{\theta} \rightarrow \check{\theta} + \text{constante}$. Dans notre cas, depuis le départ, nous n'avons pas d'ordre 3 (ni d'ordre 2 d'ailleurs).

$$a = \frac{1}{r} \quad (34)$$

et

$$b = \frac{1}{r} + \check{\theta}_r \quad (35)$$

Nous disposons donc d'une solution exacte qui nous servira de référence lorsque nous chercherons

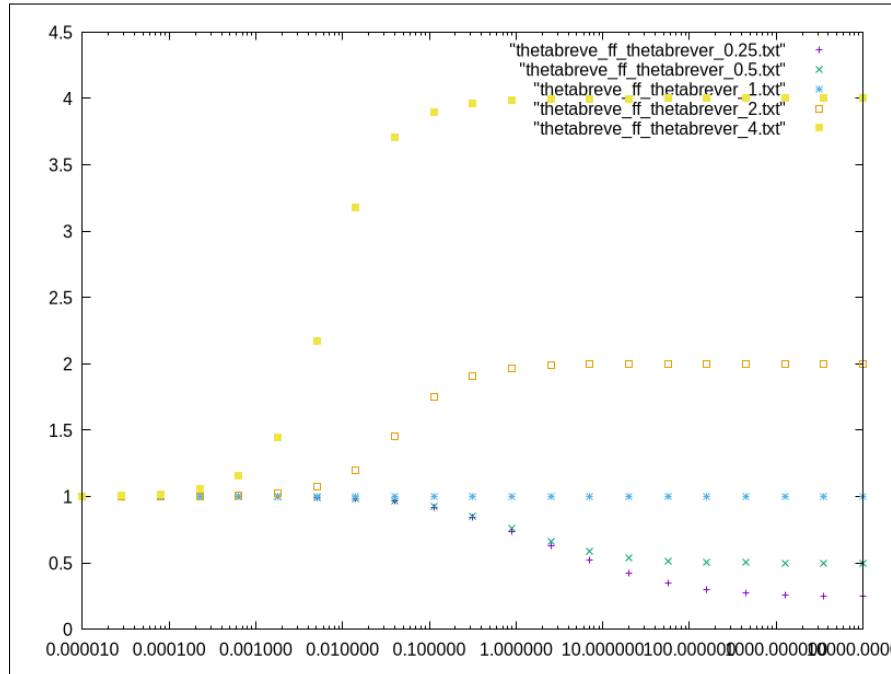


FIGURE 1 – $\check{\theta}$ en fonction de r pour $\check{\theta}_r \in \{0.25, 0.5, 1, 2, 4\}$.

à évaluer l'erreur associée à la linéarisation du transfert radiatif. Cette solution exacte est présentée sur la figure 1, en fonction de r , pour différentes valeurs de $\check{\theta}_r$. Pour les faibles valeurs de r , le rayonnement n'a plus d'influence et la température de surface rejoint la température correspondant à la conduction et la convection, c'est à dire $\check{\theta} = 1$ en termes adimensionnels. Au contraire, pour les fortes valeurs de r , le rayonnement est dominant et la température de surface rejoint la température de radiance, c'est à dire $\check{\theta} = \check{\theta}_r$ en termes adimensionnels. Ces limites sont peu intéressantes et c'est au contraire aux valeurs de r intermédiaires que l'on pourra juger si la linéarisation du transfert radiatif est une approximation pertinente ou ne l'est pas.

On note alors

$$\mathcal{P}(\check{\theta}) = \check{\theta}^4 + p^* \check{\theta}^2 + q^* \check{\theta} + r^* \quad (32)$$

et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{Q}(\check{\theta}, y) = (\check{\theta}^2 + y)^2 - \mathcal{P}(\check{\theta}) \quad (33)$$

ce qui conduit à

$$\mathcal{Q}(\check{\theta}, y) = (2y - p^*) \check{\theta}^2 - q^* \check{\theta} + (y^2 - r^*) \quad (34)$$

L'équation à résoudre est alors

$$(\check{\theta}^2 + y)^2 - \mathcal{Q}(\check{\theta}, y) = 0 \quad (35)$$

Principe : Dans sa dépendance à $\check{\theta}$, $\mathcal{Q}(\check{\theta}, y)$ est un polynôme d'ordre 2. L'idée de Ferrari est de choisir y de façon à ce que ce polynôme soit un carré. L'équation 35 s'écrit alors comme une différence de deux carrés qui est égale à zéro, du type $x_1^2 - x_2^2 = 0$ que l'on peut écrire $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$, ce qui conduit à chercher séparément les solutions de $x_1 - x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$. On va donc choisir y pour que $\mathcal{Q}(\check{\theta}, y) = (2y - p^*) \check{\theta}^2 - q^* \check{\theta} + (y^2 - r^*)$ soit un carré en $\check{\theta}$.

Dans notre cas, en remplaçant p^* , q^* et r^* par leurs valeurs, on se retrouve avec

$$\mathcal{Q}(\check{\theta}, y) = 2y\check{\theta}^2 - a\check{\theta} + (y^2 + b) \quad (36)$$

et on cherche la valeur de y pour laquelle l'équation polynomiale en θ

$$2y\check{\theta}^2 - a\check{\theta} + (y^2 + b) = 0 \quad (37)$$

admet une racine double. Cela impose que le discriminant Δ soit nul, soit

$$\Delta = a^2 - 8y(y^2 + b) = 0 \quad (38)$$

Il en résulte une équation d'ordre 3 sur y , que l'on appelle la *cubique résolvante* :

$$-8y^3 - 8by + a^2 = 0 \quad (39)$$

Le choix de la température de référence

Nous avons vu que la linéarisation du transfert radiatif passe par le choix d'une température de référence θ_{ref} à partir de laquelle est défini le coefficient d'échange radiatif $h_r = 4\epsilon\sigma\theta_{ref}^3$. Dans la pratique, notamment dans la pratique de l'ingénieur, comment un spécialiste thermicien choisirait-il la valeur de cette température de référence ?

Admettons temporairement que celui-ci disposerait déjà de la solution exacte du problème dans son ensemble. Il connaîtrait donc θ et θ_r . Il pourrait alors trouver la valeur $h_{r,ideal}$ du coefficient d'échange radiatif idéal, celle qui assure que la linéarisation de l'équation 17 est exacte, c'est à dire

$$\epsilon(\sigma\theta_r^4 - \sigma\theta^4) = h_{r,ideal}(\theta_r - \theta) \quad (36)$$

soit

$$h_{r,ideal} = \frac{\epsilon(\sigma\theta_r^4 - \sigma\theta^4)}{\theta_r - \theta} \quad (37)$$

ou encore

$$\theta_{ref,ideal}^3 = \frac{\theta_r^4 - \theta^4}{4(\theta_r - \theta)} \quad (38)$$

Dans la pratique effective, on peut choisir la température de référence de la même façon, mais sur la base d'une estimation de θ et θ_r . Avant tout calcul numérique, le spécialiste thermicien dispose en effet d'une connaissance a priori sur le système et nous allons ici résumer cette connaissance à deux informations :

- une information sur le niveau de la température de surface, soit une estimation $\tilde{\theta}$ de la température recherchée θ ;
- une information sur le niveau du flux net radiatif ψ (où de la somme du flux conductif et du flux convectif puisqu'il y a continuité des flux à la paroi), soit une estimation $\tilde{\psi}$ de ψ avec

$$\psi = \epsilon(\sigma\theta_r^4 - \sigma\theta^4) \quad (39)$$

Introduisons deux paramètres α_θ et α_ψ qui caractérisent l'erreur commise lors de ces deux estimations :

$$\tilde{\theta} = \theta(1 + \alpha_\theta) \quad (40)$$

et

$$\tilde{\psi} = \psi(1 + \alpha_\psi) \quad (41)$$

A titre d'exemple, $\alpha_\theta = +10^{-1}$ signifie que l'estimation de la température de surface conduit à une majoration de 10%, et $\alpha_\theta = -10^{-2}$ indique une minoration de 1%.

Comme

$$\psi = \epsilon(\sigma\theta_r^4 - \sigma\theta^4) \quad (42)$$

soit

$$y^3 + by - \frac{a^2}{8} = 0 \quad (40)$$

Pour trouver y il faut donc résoudre une équation polynomiale d'ordre 3, ce que l'on peut faire à l'aide de la méthode de Cardan. Le Δ de Cardan est

$$\Delta = - \left(4b^3 + \frac{27}{64}a^4 \right) \quad (41)$$

Comme a et b sont positifs, on sait que Δ est négatif et la méthode de Cardan nous permet de conclure que la seule solution réelle s'écrit

$$y = u + v \quad (42)$$

ce qui est l'équation 31 du texte principal, avec

$$u = \left(\frac{\frac{a^2}{8} + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2} \right)^{1/3} \quad (43)$$

$$v = - \left(\frac{\frac{-a^2}{8} + \sqrt{\frac{-\Delta}{27}}}{2} \right)^{1/3} \quad (44)$$

et en reportant l'expression du Δ de Cardan on obtient les équations 32 et 33 du texte principal.

A ce stade, on connaît donc la valeur de y pour laquelle le polynôme d'ordre 2 de l'équation 36, qui définit la dépendance de $\mathcal{Q}(\check{\theta}, y)$ à $\check{\theta}$, est un carré. La racine double de ce polynôme est $\frac{a}{4y}$ et $\mathcal{Q}(\check{\theta}, y)$ s'écrit

$$\mathcal{Q}(\check{\theta}, y) = 2y \left(\check{\theta} - \frac{a}{4y} \right)^2 \quad (45)$$

et l'équation 35 devient

$$(\check{\theta}^2 + y)^2 - \left(\sqrt{2y} \left(\check{\theta} - \frac{a}{4y} \right) \right)^2 = 0 \quad (46)$$

est une fonction de θ et θ_r , la capacité d'estimer θ et ψ conduit à une estimation $\tilde{\theta}_r$ de θ_r selon

$$\tilde{\psi} = \epsilon(\sigma\tilde{\theta}_r^4 - \sigma\tilde{\theta}^4) \quad (43)$$

soit

$$\tilde{\theta}_r = \left(\tilde{\theta}^4 + \frac{\tilde{\psi}}{\epsilon\sigma} \right)^{1/4} \quad (44)$$

On dispose d'une estimation $\tilde{\theta}$ de θ et une estimation $\tilde{\theta}_r$ de θ_r , dont on peut se servir pour choisir la température de référence, comme dans le cas idéal, selon

$$\theta_{ref}^3 = \frac{\tilde{\theta}_r^4 - \tilde{\theta}^4}{4(\tilde{\theta}_r - \tilde{\theta})} \quad (45)$$

En reportant définition de $\tilde{\theta}_r$, on retient

$$\theta_{ref}^3 = \frac{\tilde{\psi}}{4\epsilon\sigma \left(\left(\tilde{\theta}^4 + \frac{\tilde{\psi}}{\epsilon\sigma} \right)^{1/4} - \tilde{\theta} \right)} \quad (46)$$

En termes adimensionnels, on note

$$\check{\psi} = \frac{\psi}{\epsilon\sigma\theta_{cc}^4} = \check{\theta}_r^4 - \check{\theta}^4 \quad (47)$$

Le choix de la température de référence est alors

$$\check{\theta}_{ref}^3 = \frac{\check{\psi}}{4 \left(\left(\check{\theta}^4 + \check{\psi} \right)^{1/4} - \check{\theta} \right)} \quad (48)$$

avec comme précédemment

$$\check{\theta} = \check{\theta}(1 + \alpha_\theta) \quad (49)$$

et

$$\check{\psi} = \check{\psi}(1 + \alpha_\psi) \quad (50)$$

RQ : Les erreurs d'estimation α_θ et α_ψ ne peuvent pas être quelconques car si elles étaient faites sans contrôle du sens physique, un refroidissement radiatif trop important pourrait conduire à une température de surface négative. La contrainte est que $\check{\theta}^4 + \check{\psi}$ doit être positif, ce qui se traduit par

$$\frac{(1 + \alpha_\theta)^4}{1 + \alpha_\psi} > -\frac{\check{\psi}}{\check{\theta}^4} \quad (51)$$

que l'on écrit comme un produit,

$$\left(\check{\theta}^2 + y - \sqrt{2y} \left(\check{\theta} - \frac{a}{4y} \right) \right) \left(\check{\theta}^2 + y + \sqrt{2y} \left(\check{\theta} - \frac{a}{4y} \right) \right) = 0 \quad (47)$$

Les valeurs de $\check{\theta}$ qui satisfont cette équation doivent satisfaire l'une des deux équations suivantes,

$$\begin{cases} \check{\theta}^2 + y - \sqrt{2y} \left(\check{\theta} - \frac{a}{4y} \right) = 0 \\ \check{\theta}^2 + y + \sqrt{2y} \left(\check{\theta} - \frac{a}{4y} \right) = 0 \end{cases} \quad (48)$$

soit

$$\begin{cases} \check{\theta}^2 - \sqrt{2y}\check{\theta} + \left(y + \frac{a}{2\sqrt{2y}} \right) = 0 \\ \check{\theta}^2 + \sqrt{2y}\check{\theta} + \left(y - \frac{a}{2\sqrt{2y}} \right) = 0 \end{cases} \quad (49)$$

Chacune de ces deux équations est une équation polynomiale du second degré en $\check{\theta}$ et on a donc potentiellement 4 solutions possibles pour $\check{\theta}$. Mais pour la première équation, le discriminant

$$\Delta_1 = 2y - 4 \left(y + \frac{a}{2\sqrt{2y}} \right) = -2y - \frac{2a}{\sqrt{2y}} \quad (50)$$

est négatif (car a est positif). Les deux solutions de cette équation ne sont donc pas réelles (elles sont complexes). Par contre, le discriminant de la seconde équation est

$$\Delta_2 = 2y - 4 \left(y - \frac{a}{2\sqrt{2y}} \right) = -2y + \frac{2a}{\sqrt{2y}} \quad (51)$$

"La physique nous dit" qu'il y a une seule solution positive. On doit donc pouvoir prouver que $\Delta_2 > 0$ et que $\left(y - \frac{a}{2\sqrt{2y}} \right) < 0$ (exercice!). On l'admet et alors la solution que nous cherchons est

$$\check{\theta} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2y} + \sqrt{-2y + \frac{2a}{\sqrt{2y}}} \right) \quad (52)$$

ce qui est l'équation 30 du texte principal.

Ecart entre la solution linéarisée et la solution exacte

La linéarisation du rayonnement conduit à la solution de l'équation 26 ou on utilise la définition de P_r de l'équation 27, avec la température de référence de l'équation 48 fondée sur l'estimation de la température de surface et l'estimation du flux des équations 49 et 50. On peut estimer le niveau de précision de cette solution linéarisée par comparaison à la solution exacte de l'équation 30.

C'est l'objet des figures 2, 3 et 4. Ces trois figures s'attachent à l'analyse de la configuration où l'effet de la non-linéarité est le plus fort parmi celles tracées dans la figure 1 : la configuration où $\check{\theta}_r = 4$. La figure 2 présente la même courbe que celle de la figure 1 (la référence) ainsi que les solutions linéaires fondées sur différents niveaux d'incertitude des estimations de la température de surface et du flux net radiatif, c'est à dire en jouant sur les valeurs de α_θ et α_ψ . Pour $\alpha_\theta = 0$ et $\alpha_\psi = 0$ on retrouve exactement la solution de référence car la température de référence est choisie de façon idéale. On utilise ensuite des valeurs de α_θ de -0.5 , -0.1 , 0.1 et 0.5 et de même des valeurs de α_ψ de -0.5 , -0.1 , 0.1 et 0.5 . On voit avant tout qu'après linéarisation on retrouve encore les limites triviales correspondant aux très faibles et très fortes valeurs de r : quand le rayonnement ne compte pas, ou quand le rayonnement domine, les solutions obtenues sont bien celles attendues. La figure 3 présente l'erreur relative, c'est à dire $\frac{\check{\theta}_{lin} - \check{\theta}}{\check{\theta}}$. Dans la figure 4 on change la référence : l'erreur relative est exprimée avec comme référence l'écart $|\check{\theta} - 1|$ qui est proportionnel au flux net radiatif (ou au flux conductif plus convectif). On voit alors que si l'enjeu est d'estimer avec précision le flux radiatif, alors quand ce flux radiatif est faible il est vite mal estimé quand α_θ et α_ψ s'écartent de 0, ceci alors que la température de surface est pourtant bien estimée (elle tend vers 1).

On peut quand même avant tout retenir que l'approximation de la linéarisation du rayonnement est vite raisonnable lorsque l'ingénieur dispose de bonnes estimations a priori de la température de surface et du flux net radiatif. Mais dans ce qui suit, nous allons voir que cette conclusion n'est que d'une portée très limitée : elle est fondée sur le fait qu'il n'y a qu'une seule température de radiance, alors que la pratique presque toujours très différente.

Plusieurs températures d'échange radiatif

Dans tout ce qui précède, nous sommes partis de la température de radiance définie dans l'équation 10 et nous avons supposé que cette température de radiance était connue. Or elle est définie comme une intégrale sur l'ensemble des chemins radiatif reliant le point d'observation (celui où on cherche la température de surface $\check{\theta}$) à tous les autres points de surface $\check{\theta}_\gamma$ visibles depuis ce point d'observation. En termes adminensionnels, l'équation 10 s'écrit

$$\check{\theta}_r = \left(\int_{\mathcal{U}_r} p_\Gamma(\gamma) d\gamma \check{\theta}_\gamma^4 \right)^{1/4} \quad (52)$$

et l'équation 13 donnant $\check{\theta}$ (l'équation de départ avant linéarisation) peut s'écrire de la façon suivante, de sorte à mettre en exergue le flux net radiatif :

$$\check{\theta} - 1 = \check{\psi} \quad (53)$$

avec

$$\check{\psi} = \check{\theta}_r^4 - \check{\theta}^4 = \left(\int_{\mathcal{U}_r} p_\Gamma(\gamma) d\gamma \check{\theta}_\gamma^4 \right) - \check{\theta}^4 \quad (54)$$

soit, en rappelant que $\int_{\mathcal{U}_r} p_\Gamma(\gamma) d\gamma = 1$,

$$\check{\psi} = \int_{\mathcal{U}_r} p_\Gamma(\gamma) d\gamma \left(\check{\theta}_\gamma^4 - \check{\theta}^4 \right) \quad (55)$$

Si $\check{\theta}_\gamma$ est le même au bout de chaque chemin, c'est à dire si le point d'observation échange radiativement avec des surfaces qui ont toutes exactement la même température, alors $\forall \gamma, \check{\theta}_\gamma = \check{\theta}_r$ et on est rammené à l'étude précédente avec $\check{\psi} = \check{\theta}_r^4 - \check{\theta}^4$.

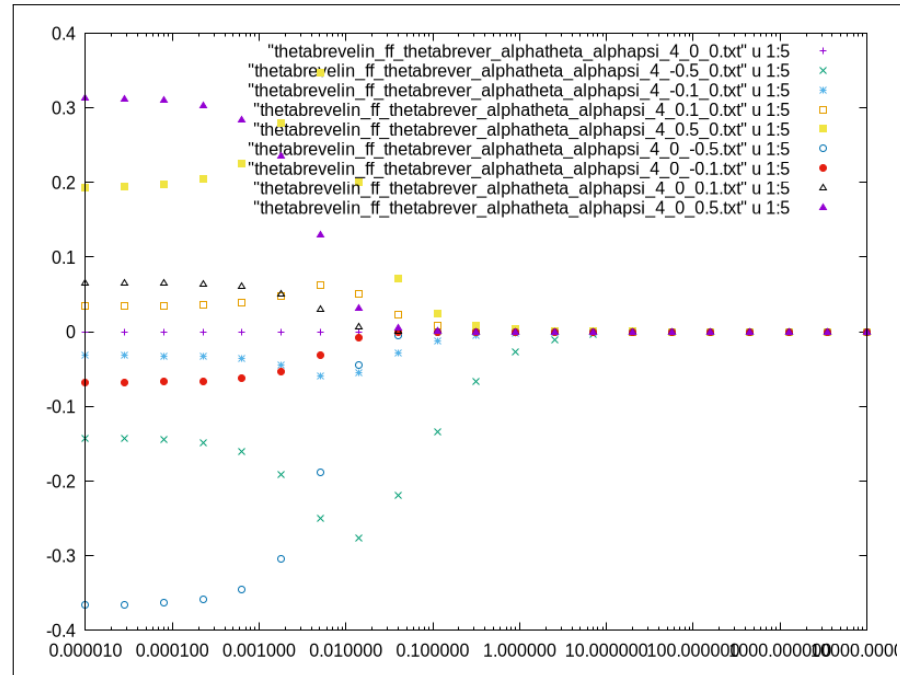


FIGURE 4 – Incertitude relative de $\check{\theta}_{lin}$, ramenée au flux, c'est à dire rapportée à $\check{\theta} - 1$, en fonction de r pour $\check{\theta}_r = 4$ et pour différentes qualité d'estimation de α_θ et α_ψ lors du choix de $\check{\theta}_{ref}$.

valeurs de la température de surface $\check{\theta}_\gamma$ au bout de chaque chemin. Même si on disposait d'une connaissance a priori très précise de la température $\check{\theta}$ recherchée et du flux net radiatif $\check{\psi}$, il ne serait pas possible d'en déduire comme précédemment une valeur de $\check{\theta}_{ref}$ idéale pour laquelle la solution du problème après linéarisation serait la même que celle du problème non-linéaire de référence.

En résumé, en ajustant $\check{\theta}_{ref}$ comme nous l'avons fait dans les sections précédentes, nous avons implicitement supposé que la surface étudiée échangeait par rayonnement avec des surfaces qui avaient toutes la même température $\check{\theta}_r$. Sous cette hypothèse, il nous était possible de nous appuyer sur des estimations de $\check{\theta}$ et $\check{\psi}$ pour choisir la température $\check{\theta}_{ref}$ à utiliser pour la linéarisation. Si les incertitudes d'estimation α_θ et α_ψ étaient nulles (estimation parfaite), alors la linéarisation conduisait à une solution exacte et la seule question résiduelle (celle abordée dans les figures 2, 3 et 4) était l'influence des incertitudes α_θ et α_ψ de l'ingénieur lors de ses estimations a priori α_θ et α_ψ .

Mais dans le cas général l'erreur associée à la linéarisation n'est pas seulement liée à la connaissance imparfaite de l'ingénieur : même si cette connaissance était parfaite, même si on avait $\alpha_\theta = 0$ et $\alpha_\psi = 0$, après linéarisation, du fait de l'existence de températures différentes au bout des chemins radiatifs, la solution ne serait plus exacte.

Un exemple avec deux températures d'échange radiatif

Afin d'illustrer l'impact de cette multiplicité des températures au bout des chemins radiatifs, nous allons considérer un exemple très simple où la surface étudiée échange radiativement avec deux groupes de surfaces : un premier groupe de température $\check{\theta}_{\gamma,1}$ et un second groupe de température $\check{\theta}_{\gamma,2}$. Pour simplifier encore, on admettra que $\check{\theta}_{\gamma,2} = \check{\theta}$, c'est à dire que les chemins radiatifs terminent le course

- soit sur une surface de température $\check{\theta}_{\gamma,1} \neq \check{\theta}$ (il y a un vrai échange net radiatif) ;
- soit sur une surface dont la température est identique à celle étudiée (l'échange net est nul).

On note $P_{\gamma,1}$ la fraction des chemins qui sont dans le premier groupe.

Cet exemple peut être rencontré très concrètement lorsque la surface étudiée (dont la température $\check{\theta}$ est la température recherchée) est une surface plane infinie (d'émissivité ϵ) et qu'elle fait face à une autre surface plane infinie, de température $\check{\theta}_{\gamma,1}$ et d'émissivité ϵ_1 . Dans ce cas, les chemins radiatifs peuvent subir des réflexions multiples sur les deux surfaces et terminer leur course

- soit sur la face en regard, avec $\check{\theta}_\gamma = \check{\theta}_{\gamma,1}$;
- soit sur la face de départ, avec $\check{\theta}_\gamma = \check{\theta}$.

Il est facile de montrer que la fraction du premier type est $P_{\gamma,1} = \frac{\epsilon_1}{1-(1-\epsilon)(1-\epsilon_1)}$ et qu'en agissant sur ϵ_1 on peut ajuster la valeur de cette fraction entre $P_{\gamma,1} = 0$ et $P_{\gamma,1} = 1$.

Dans les figures 5, 6 et 7) on reprend les mêmes comparaisons que précédemment (entre la solution exacte et la solution après linéarisation), mais cette fois

- pour $\check{\theta}_{\gamma,1} = 4$ (et non plus pour $\check{\theta}_r = 4$) ;
- pour différentes valeurs de $P_{\gamma,1}$;
- pour $\alpha_\theta = 0$ et $\alpha_\psi = 0$ (c'est à dire en supposant que l'ingénieur ne fait aucune erreur dans son estimation de $\check{\theta}$ et $\check{\psi}$).

Les erreurs liées à la linéarisation sont ici supérieures à celles des tests précédents, alors que l'on admet pourtant que l'ingénieur connaît déjà $\check{\theta}$ et $\check{\psi}$ parfaitement lorsqu'il fait le choix de la température de référence la plus adaptée à sa configuration. La raison est que le choix que nous avons proposé pour la température de référence faisait l'hypothèse qu'il n'y avait qu'une seule température d'échange radiatif (les températures au bout des chemins radiatifs étaient toutes voisines, donc voisines de θ_r). On utilisait alors les valeurs estimées de $\check{\theta}$ et $\check{\psi}$ pour estimer θ_r et on cherchait la température de référence idéale sur cette base. Or ici, quand $P_{\gamma,1}$ tend vers zéro, la température de radiance θ_r est très différente de $\theta_{\gamma,1}$ et pourtant ce sont les chemins qui rencontre $\theta_{\gamma,1}$ qui font tout l'échange. C'est donc sur la base de $\theta_{\gamma,1}$ que l'on devrait choisir la température de référence.

On voit donc que c'est un autre type d'information a priori sur la solution du problème dont l'ingénieur aurait besoin : non pas seulement une estimation de la température recherchée et du flux net radiatif, mais de la température d'échange radiatif contribuant le plus au flux net radiatif.

Si on a essentiellement deux températures d'échange radiatif et surtout si (comme dans notre exemple) l'une d'elle est écartée de θ de façon significative (elle fait tout l'échange net) alors que l'autre est très proche de θ (elle ne contribue pas à l'échange net), alors on peut imaginer que des solutions pratiques sont possibles. Mais de façon plus générale on peut retenir que l'idée de "bien choisir la température de référence" est une idée qui peut rapidement devenir impraticable dès que la surface d'étude échange radiativement avec des objet à des températures très diverses.

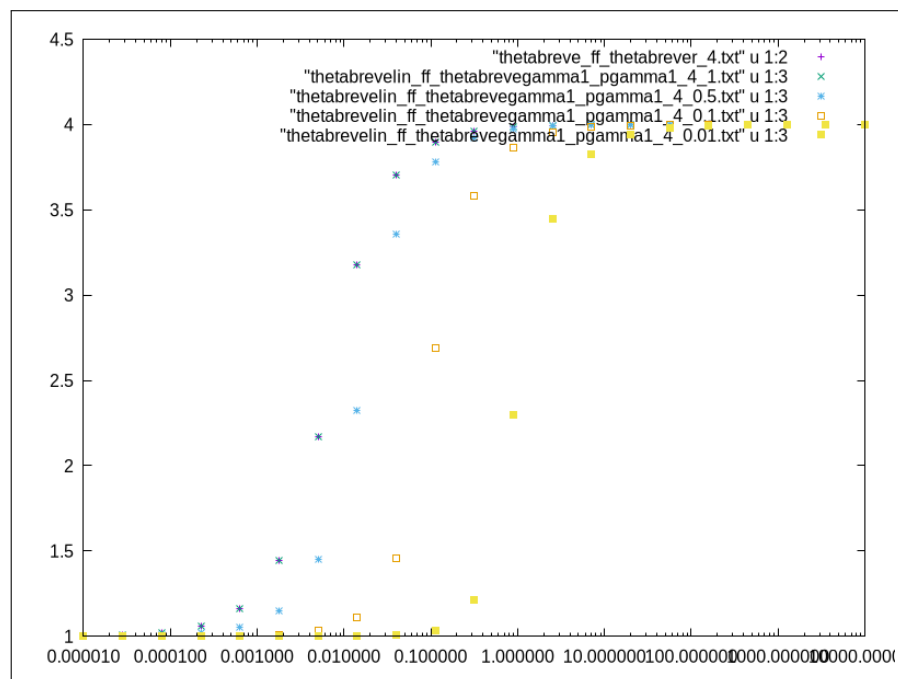


FIGURE 5 – Deux températures radiatives : $\check{\theta}_{lin}$ en fonction de r pour $\check{\theta}_{\gamma,1} = 4$ et pour $P_{\gamma,1} \in \{1, 0.5, 0.1, 0.01\}$. On prend $\alpha_\theta = 0$ et $\alpha_\psi = 0$ lors du choix de $\check{\theta}_{ref}$ (aucune erreur dans l'estimation a priori de $\check{\theta}$ et $\check{\psi}$).

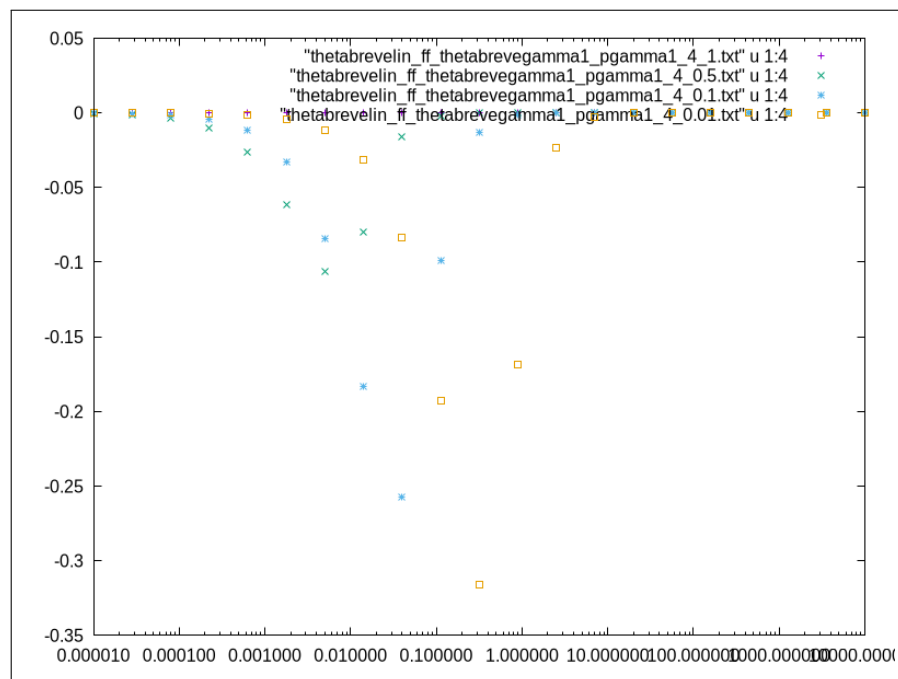


FIGURE 6 – Deux températures radiatives : incertitude relative de $\check{\theta}_{lin}$ en fonction de r pour $\check{\theta}_{\gamma,1} = 4$ et pour $P_{\gamma,1} \in \{1, 0.5, 0.1, 0.01\}$. On prend $\alpha_\theta = 0$ et $\alpha_\psi = 0$ lors du choix de $\check{\theta}_{ref}$ (aucune erreur dans l'estimation a priori de $\check{\theta}$ et $\check{\psi}$).

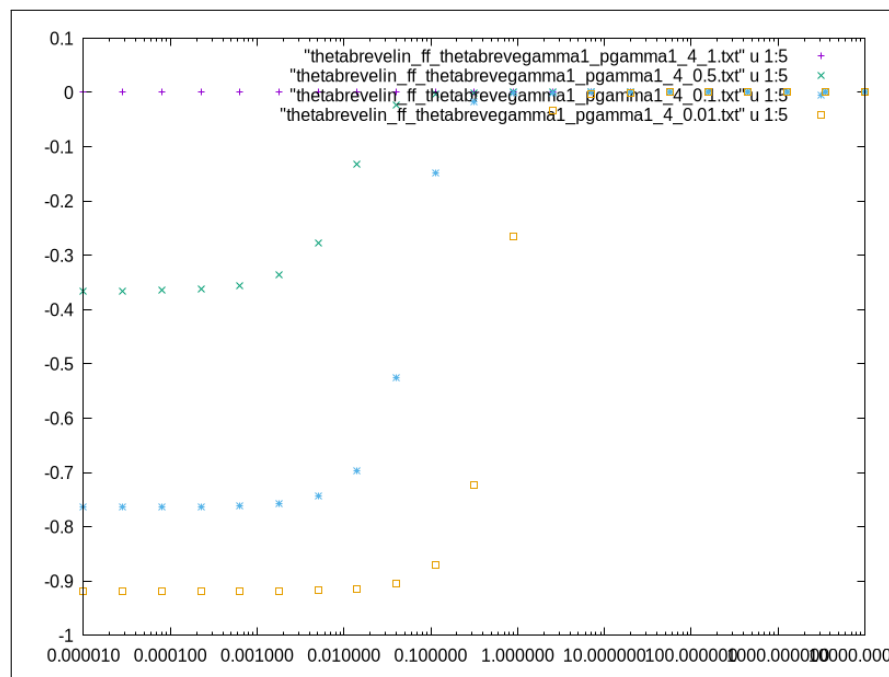


FIGURE 7 – Deux températures radiatives : incertitude relative de $\check{\theta}_{lin}$, ramenée au flux, c'est à dire rapportée à $\check{\theta} - 1$, en fonction de r pour $\check{\theta}_{\gamma,1} = 4$ et pour $P_{\gamma,1} \in \{1, 0.5, 0.1, 0.01\}$. On prend $\alpha_\theta = 0$ et $\alpha_\psi = 0$ lors du choix de $\check{\theta}_{ref}$ (aucune erreur dans l'estimation a priori de $\check{\theta}$ et $\check{\psi}$).