Descriptions mésoscopiques et macroscopiques

On s'intéresse ici à un ensemble de photons de même fréquence (modèle monochromatique) au sein du corpus de la physique du transfert radiatif. Cette physique est une physique mésoscopique au sens où en chaque point de l'espace on cherche à caractériser l'ensemble de la distribution statistique des états des photons. Ici, comme la fréquence est fixée et comme le module de vitesse est imposé par la matière traversée, le seul état qu'il s'agit de caractériser est la direction de propagation. Nous noterons $\vec{U}$ la variable aléatoire correspondant au vecteur unitaire donnant la direction de propagation d'un photon pris à la position $\vec{x}$ à l'instant t. Pour une direction particulière $\vec{u}$, on notera $p_U(\vec{u};\vec{x},t)$ la densité de probabilité de $\vec{U}$.

On admettra ici que l'indice de réfraction est égal à l'unité : les photons se déplacent avec un module de vitesse égal à celui des ondes électromagnétiques dans le vitesse, noté c_0. On peut donc aussi raisonner à partir de la variable aléatoire $\vec{C}$ qui correspond à la vitesse de propagation d'un photon pris à la position $\vec{x}$ à l'instant t. Le lien entre $\vec{C}$ et $\vec{U}$ est simplement

$$\vec{C} = c_0\vec{U} \tag{1}$$

Dans une description macroscopique (approche fluidique), on ne chercherait pas à caractériser $\vec{U}$ ou $\vec{C}$ complètement : on se contenterait de connaître quelques statistiques de leurs distributions. Typiquement on s'intéresserait à l'espérance de $\vec{C}$ (la vitesse moyenne). Nous la noterons ici $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{x},t)$, soit

$$\vec{v} = \mathbb{E}(\vec{C}) = c_0\mathbb{E}(\vec{U}) \tag{2}$$

Dans les deux cas, modélisation mesoscopique (transfert radiatif) ou modélisation macroscopique (approche fluidique), indépendamment de la distribution des vitesses, on aurait aussi besoin de caractériser la distribution spatiale des photons. La grandeur correspondante est la densité de photons, que nous noterons ici $\eta \equiv \eta(\vec{x},t)$.

En résumé,

- en mésoscopique comme en macroscopique on dispose de toute l'information sur la distribution spatiale des photons via la connaissance du champ de densité de photons η ;
- en mésoscopique on dispose également de toute l'information sur la distribution angulaire des photons via la connaissance de la densité de probabilité de la direction p_U ;
- en macroscopique on ne connait pas toute l'information sur les directions de propagation mais seulement certaines de ses statistiques, par exemple, la vitesse moyenne des photons $\vec{v}$.

Une notation essentielle pour la partie mesoscopique sera la fonction de distribution $f \equiv f(\vec{u},\vec{x},t)$ qui regroupe les informations spatiales et directionnelles :

$$f(\vec{u},\vec{x},t) = \eta(\vec{x},t)p_U(\vec{u};\vec{x},t) \tag{3}$$

et on retiendra les deux propriétés suivantes :

$$\eta = \int_{4\pi} f\ d\vec{u} \tag{4}$$

et

$$\vec{v} = \frac{1}{\eta}\int_{4\pi} fc_0\vec{u}\ d\vec{u} \tag{5}$$

où on indice par 4π les intégrales qui portent sur l'ensemble des directions de la sphère unité.

De même, une notation essentielle pour la partie macroscopique sera le vecteur densité surfacique de flux $\vec{j} \equiv \vec{j}(\vec{x},t)$ qui traduit l'advection des photons :

$$\vec{j} = \eta\vec{v} = \int_{4\pi} fc_0\vec{u}\ d\vec{u} \tag{6}$$

L'équation de transfert radiatif

En diffusion pure (pas d'émission, pas d'absorption) l'Equation de Transfert Radiatif s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_0 \vec{u} \cdot \vec{grad} f = -k c_0 f + k c_0 \int_{4\pi} f' p(\vec{u}|\vec{u}')\ d\vec{u}' \tag{7}$$

où $f' \equiv f(\vec{u}', \vec{x}, t)$. En lui ajoutant des conditions à la limite d'un domaine, elle régit la fonction de distribution au sein de ce domaine.

Attardons nous sur la signification de chacun des termes de l'equation. Les deux termes de la partie gauche de l'équation sont appelés *termes de transport*. On notera

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{8}$$

et

$$\mathcal{T}_2 = c_0 \vec{u} \cdot \vec{grad} f \tag{9}$$

Les deux termes de la partie droite sont appelés *termes collisionnels*. On notera

$$\mathcal{C}_1 = -k c_0 f \tag{10}$$

et

$$\mathcal{C}_2 = k c_0 \int_{4\pi} f' p(\vec{u}|\vec{u}')\ d\vec{u}' \tag{11}$$

— Le premier terme de gauche, $\mathcal{T}_1$, represente l'evolution temporelle de la fonction de distribution des photons, au point $\vec{x}$, ayant pour direction $\vec{u}$.

— Le deuxième terme de gauche, $\mathcal{T}_2$, représente la variation spatiale de la fonction de distribution des photons dans la direction donnée par le vecteur vitesse $c_0\vec{u}$. il s'agit d'un terme d'advection.

— Le premier terme de droite, $\mathcal{C}_1$, représente le terme de diffusion sortante, c'est à dire l'ensemble des photons sortant de la direction $\vec{u}$ suite à un évènement de diffusion (k étant le coefficient de diffusion)

— Pour finir, le dernier terme à droite dans l'equation, $\mathcal{C}_2$ représente le terme de diffusion entrante, c'est dire l'ensemble des photons provenant de directions differentes de $\vec{u}$ qui vont être diffusés dans la direction $\vec{u}$. En effet $f'(x, \vec{u'}, t)$ repésente le nombre de photons en $\vec{x}$ au temps t dans la direction $\vec{u'}$. Un certain nombre de ces photons va vivre un evenement de diffusion, $kc_0 f'(x, \vec{u}, t)$ et seulement une proportion de ces photons seront diffusés dans la direction $\vec{u}$, soit $kc_0 f'(x, \vec{u}, t) p(\vec{u}|\vec{u'})$, qui dépendra de la fonction de phase de diffusion simple $p(\vec{u}|\vec{u'})$ (densité de probabilité de se retrouver dans la direction $\vec{u}$ pour un photon initialement dans la direction $\vec{u'}$ lorsqu'il vit une diffusion). La source par diffusion entrante est alors obtenue en intégrant ce nombre de photons sur toutes les directions $\vec{u'}$.

L'équation de continuité

La première étape consiste à sommer chacun des termes sur l'ensemble des directions de la sphère unité (sur 4π), soit formellement introduire $\int_{4\pi} d\vec{u}$ devant chacun des termes.

Premier terme de transport

Le premier terme de transport devient

$$\int_{4\pi} d\vec{u}\ \mathcal{T}_1 = int_{4\pi} d\vec{u}\ \frac{\partial f}{\partial t} \tag{12}$$

et en utilisant le fait que $\vec{u}$ et t sont des variables indépendantes,

$$\int_{4\pi} d\vec{u}\ \mathcal{T}_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{4\pi} f\ d\vec{u}\right) \tag{13}$$

Puis, en utilisant l'équation 4,

$$\int_{4\pi} d\vec{u}\ \mathcal{T}_1 = \frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{14}$$

Second terme de transport

Le second terme de transport devient

$$\int_{4\pi} d\vec{u}\ \mathcal{T}_2 = \int_{4\pi} d\vec{u}\ c_0\vec{u} \cdot \vec{grad} f = \int_{4\pi} c_0\vec{u} \cdot \vec{grad} f d\vec{u} = \int_{4\pi} \mathrm{div}(fc_0\vec{u}) d\vec{u} \tag{15}$$

Cette expression est obtenue grace à la propriété suivante :

$$\mathrm{div}(fc_0\vec{u}) = fc_0\ \mathrm{div}(\vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{grad}(fc_0) \tag{16}$$

or $\vec{u}$ et $\vec{x}$ sont des variables indépendantes, donc

$$\mathrm{div}(\vec{u}) = 0 \tag{17}$$

et ainsi

$$\mathrm{div}(fc_0\vec{u}) = 0 + \vec{u} \cdot \vec{grad}(fc_0) = c_0\vec{u} \cdot \vec{grad} f \tag{18}$$

ce qui justifie bien l'équation 15.

Premier terme collisionnel

Plus directement, le premier terme collisionnel devient

$$\int_{4\pi} d\vec{u}\ \mathcal{C}_1 = \int_{4\pi} d\vec{u}\ (-kc_0 f) = \int_{4\pi} (-kc_0 f) d\vec{u} = -kc_0 \int_{4\pi} f d\vec{u} = -kc_0\eta \tag{19}$$

Second terme collisionnel

Le second terme collisionnel devient

$$\int_{4\pi} d\vec{u}\ \mathcal{C}_2 = \int_{4\pi} d\vec{u} \int_{4\pi} f' p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u}' = kc_0 \int_{4\pi} d\vec{u} f' \int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u} = kc_0\eta \tag{20}$$

où on utilise les deux propriétés $\int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u} = 1$ et $\int_{4\pi} f' d\vec{u}' = \eta$.

Synthèse

Nous pouvons alors regrouper les développements de chacun de ces termes pour obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \int_{4\pi} \mathrm{div}(f c_0 \vec{u}) d\vec{u} = -k c_0 \eta + k c_0 \eta = 0 \tag{21}$$

Or $\vec{u}$ et $\vec{x}$ sont des variables indépendantes, ce qui nous permet de regrouper les termes de l'integrale de la divergence :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div}(\int_{4\pi} f c_0 \vec{u} d\vec{u}) = 0 \tag{22}$$

Or l'équation 6 nous dit que l'intégrale à l'intérieur de la divergence est le vecteur densité surfacique de flux $\vec{j}$. L'équation finale s'écrit donc :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0 \tag{23}$$

Nous reconnaissons ici l'équation de continuité (conservation du nombre de photons).

L'équation d'évolution du vecteur flux sous l'hypothèse du proche équilibre

La deuxième étape de travail consiste à sommer chacun des termes sur l'ensemble des vitesses, ce qui formellement revient a introduire $\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}$ devant chacun des termes.

Premier terme de transport

Le premier terme de transport devient

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; \mathcal{T}_1 = \int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{4\pi} f c_0 \vec{u} d\vec{u} = \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \tag{24}$$

le regroupement dans la dérivée est en effet possible puisque $\vec{u}$ et t sont des variables independantes.

Second terme de transport

Le traitement du second terme de transport $\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; (c_0 \vec{u} \cdot \vec{grad} f)$ necessite une approximation. En effet, en toute généralité nous ne disposons d'aucune information sur la façon avec laquelle $\vec{grad} f$ dépend de la direction $\vec{u}$.

A ce stade, on retient donc que le second terme de transport ne peut pas s'écrire en des termes purement macroscopiques (en n'utilisant que η et $\vec{j}$). Nous le reprendrons plus bas sous l'hypothèse du proche équilibre, mais pour l'instant nous le conservons sous forme intégrale :

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; \mathcal{T}_2 = \int_{4\pi} c_0^2 (\vec{u} \cdot \vec{grad} f) \vec{u} d\vec{u} \tag{25}$$

Premier terme collisionnel

Developpons maintenant le premier terme collisionnel de l'equation de transfert radiatif :

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; \mathcal{C}_1 = \int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u} (-kc_0 f) = -kc_0 \int_{4\pi} f c_0 \vec{u} d\vec{u} = -kc_0 \vec{j} \tag{26}$$

Second terme collisionnel

Enfin, l'ultime terme de l'ETR, c'est a dire le terme de diffusion rentrante

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; \mathcal{C}_2 = \int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u} \left(kc_0 \int_{4\pi} f'(\vec{u}') p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u}' \right) \tag{27}$$

que nous re-écrivons

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; \mathcal{C}_2 = kc_0^2 \int_{4\pi} f'(\vec{u}') d\vec{u}' \int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u} \vec{u} \tag{28}$$

Le terme $< \vec{u} >= \int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u} \vec{u}$ correspond à la moyenne de la direction après diffusion pour un photon qui se déplaçait dans la direction $\vec{u}'$ avant diffusion (somme de toutes les direction $\vec{u}$ pondérées par la fonction de phase $p(\vec{u}|\vec{u}')$, c'est à dire la densité de probabilité de la direction après diffusion, donc de $\vec{u}$ sachant $\vec{u}'$). Si on admet que la fonction de phase est symétrique autour de $\vec{u}'$, alors la moyenne des direction après diffusion est colinéaire à $\vec{u}'$. On peut alors écrire

$$< \vec{u} >= (< \vec{u} > \cdot \vec{u}') \vec{u}' \tag{29}$$

soit

$$< \vec{u} >= \left(\int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u} \vec{u} \cdot \vec{u}' \right) \vec{u}' \tag{30}$$

En remarquant que $\vec{u} \cdot \vec{u}' = cos(\theta)$ où θ est l'angle de déviation de $\vec{u}'$ (avant diffusion) vers $\vec{u}$ (après diffusion), on observe que

$$g = \int_{4\pi} p(\vec{u}|\vec{u}') d\vec{u} \vec{u} \cdot \vec{u}' \tag{31}$$

est la moyenne des cosinus des angles de déviation, une moyenne qui est communément appelée le *coefficient d'asymétrie de la fonction de phase*. On a donc

$$< \vec{u} >= g \vec{u}' \tag{32}$$

Dans la quasi-totalité des problèmes de transfert radiatif, la fonction de phase est la même quelque soit la direction d'incidence, c'est à dire que $p(\vec{u}|\vec{u}')$ ne dépend pas de $\vec{u}'$ mais seulement de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. Auquel cas, le coefficient d'asymétrie g est indépendant de $\vec{u}'$. Dans ce cas, l'équation 28 devient

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; \mathcal{C}_2 = kc_0^2 \int_{4\pi} f'(\vec{u}') d\vec{u}'\; g\vec{u}' = kc_0 g \int_{4\pi} f'(\vec{u}') c_0 \vec{u}' d\vec{u}' \tag{33}$$

où on reconnaît l'expression du vecteur flux (voir l'équation 6), ce qui conduit à

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\; \mathcal{C}_2 = kc_0 g \vec{j} \tag{34}$$

Synthèse

Nous pouvons alors regrouper les développements de chacun de ces termes (équations 24, 25, 26 et 34) pour obtenir l'équation suivante :

$$\frac{partial\vec{j}}{partialt} + \int_{4\pi} c_0^2(\vec{u} \cdot \vec{grad} f)\vec{u}d\vec{u} = -kc_0(1-g)\vec{j} \tag{35}$$

Comme annoncé, cette équation n'est pas encore une équation macroscopique puisqu'elle contient encore une intégrale angulaire de f qui ne peut pas s'exprimer à l'aide de η et $\vec{j}$.

L'hypothèse du proche équilibre

Afin d'écrire (de façon approchée) l'intégrale angulaire encore présente dans l'équation 35, nous allons ici utiliser un developpement de f sur la base des harmoniques sphériques, que l'on tronquera à l'ordre 1.

RQ (à clarifier) :

— Pourquoi la base des harmoniques spheriques est elle une base pertinente pour traiter l'expression de ce deuxième terme ?

— Pourquoi en proche équilibre les harmoniques d'ordre supérieur à 1 peuvent-elles être négligées ?

Si, dans sa dépendance à la direction $\vec{u}$, on développe f sur la base des harmoniques sphériques et si on ne conserve que l'ordre 0 et l'ordre 1, nous pouvons approcher f de la manière suivante :

$$f(\vec{u}, \vec{x}, t) \simeq a + \vec{b} \cdot \vec{u} \tag{36}$$

où $a \equiv a(\vec{x}, t)$ et $\vec{b} \equiv \vec{b}(\vec{x}, t)$ sont indépendants de $\vec{u}$.

Afin d'identifier les termes a et $\vec{b}$, écrivons tout d'abord la densité de photons à l'aide de cette approximation :

$$\eta = \int_{4\pi} f d\vec{u} \simeq \int_{4\pi} a d\vec{u} + \int_{4\pi} \vec{b} \cdot \vec{u} d\vec{u} = \int_{4\pi} a d\vec{u} + \vec{b} \cdot \int_{4\pi} \vec{u} d\vec{u} \tag{37}$$

Or $\int_{4\pi} \vec{u} d\vec{u} = 0$ donc

$$\eta = \int_{4\pi} a d\vec{u} = a \int_{4\pi} d\vec{u} = 4\pi a \tag{38}$$

Ainsi nous obtenons l'expression du terme isotrope du developpement en harmoniques sphériques :

$$a = \frac{\eta}{4\pi} \tag{39}$$

Ecrivons de même le vecteur densité surfacique de flux $\vec{j}$ à l'aide de l'approximation de l'équation 36 :

$$\vec{j} = \int_{4\pi} f(\vec{u}) c_0 \vec{u} d\vec{u} \simeq \int_{4\pi} a c_0 \vec{u} d\vec{u} + \int_{4\pi} (\vec{b} \cdot \vec{u}) c_0 \vec{u} d\vec{u} \tag{40}$$

Or $\int_{4\pi} \vec{u} d\vec{u} = 0$, donc le premier terme s'annule. Il reste donc

$$\vec{j} = \int_{4\pi} (\vec{b} \cdot \vec{u}) c_0 \vec{u} d\vec{u} \tag{41}$$

? ? ? ... que l'on peut écrire

$$\vec{j} \simeq \left(\int_{4\pi} (\vec{b} \cdot \vec{u}) c_0 \vec{u} \cdot \frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} d\vec{u} \right) \frac{\vec{b}}{||\vec{b}||} \tag{42}$$

Nous voyons que $\vec{b}$ est de la forme $\vec{b} = \alpha\vec{j}$ car le terme entre parenthèses est un scalaire. Ainsi en remplaçant $\vec{b}$ par $\alpha\vec{j}$ dans l'expression de $\vec{j}$, nous pouvons obtenir :

$$\vec{j} \simeq \left(\int_{4\pi} \alpha\vec{j} \cdot \vec{u} c_0 \vec{u} \cdot \frac{\alpha\vec{j}}{||\alpha\vec{j}||} \right) \frac{\alpha\vec{j}}{||\alpha\vec{j}||} \simeq \alpha||\vec{j}|| \int_{4\pi} \frac{\vec{j} \cdot \vec{u}}{||\vec{j}||} c_0 \frac{\vec{j} \cdot \vec{u}}{||\vec{j}||} d\vec{u} \frac{\vec{j}}{||\vec{j}||} \tag{43}$$

et si nous appelons $\frac{\vec{j}}{||\vec{j}||} = \vec{u}_j$, l'expression devient :

$$\vec{j} \simeq \alpha\vec{j} \int_{4\pi} \vec{u}_j \cdot \vec{u} c_0 \vec{u}_j \cdot \vec{u} d\vec{u} \simeq \alpha c_0 \left(\int_{4\pi} (\vec{u}_j \cdot \vec{u})^2 d\vec{u} \right) \vec{j} \tag{44}$$

Cela signifie que le terme $\alpha c_0 \left(\int_{4\pi} (\vec{u}_j \cdot \vec{u})^2 d\vec{u} \right) \vec{j}$ doit être égal à 1 :
appelons θ l'angle entre le vecteur unitaire du flux, $\vec{u}_j$ et le vecteur $\vec{u}$, alors :

$$(\vec{u}_j \cdot \vec{u})^2 = cos^2\theta \tag{45}$$

et en utilisant l'écriture autour de l'angle solide $d\vec{u}$:

$$\alpha c_0 \int 0^\pi d\theta \int 0^{2\pi} d\phi sin\theta cos^2\theta = 1 \tag{46}$$

que l'on peut résoudre par changement de variable $cos\theta = \mu$, avec $d\mu = d\theta sin\theta$. Ainsi :

$$\int -1^1 d\mu\mu^2 = \left[\frac{1}{3}\mu^3 \right]_- 1^1 = \frac{2}{3} \tag{47}$$

ce qui permet d'identifier α :

$$\alpha = \frac{3}{2} c_0 \tag{48}$$

Ainsi nous obtenons l'expression de la fonction de distribution approximée dans la base des harmoniques sphériques (rappelons que nous avons posé $\vec{b} = \alpha\vec{j}$) :

$$f(\vec{u}) = \frac{\eta}{4\pi} + \frac{3}{2c_0} \vec{j} \cdot \vec{u} \tag{49}$$

Le second terme de transport sous l'hypothèse du proche équilibre

Avec l'équation 49, nous avons abouti à une expression de f comme une fonction de la direction $\vec{u}$ dont les paramètres s'expriment en fonction des grandeurs macroscopiques η et $\vec{j}$. Cette expression n'est valable qu'à la limite du proche équilibre, mais à cette limite elle nous permet que reprendre le second terme de transport de l'équation du flux (équation 25). Nous allons ainsi pouvoir exprimer le résultat de l'intégrale restante en des termes purement macroscopiques.

L'équationn 25 devient :

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\ \mathcal{T}_2 = \int_{4\pi} c_0^2 (\vec{u} \cdot \vec{grad} f) \vec{u} d\vec{u} = \int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u} \left(c_0 \vec{u} \cdot \vec{grad} \left(\frac{\eta}{4\pi} + \frac{3}{2c_0} \vec{j} \cdot \vec{u} \right) \right) \tag{50}$$

ou encore

$$\int_{4\pi} c_0 \vec{u} d\vec{u}\ \mathcal{T}_2 = \int_{4\pi} c_0^2 \vec{u} \left(\vec{u} \cdot \vec{grad} \left(\frac{\eta}{4\pi} \right) \right) + \int_{4\pi} c_0^2 \vec{u} \left(\vec{u} \cdot \vec{grad} \left(\frac{3}{2c_0} \vec{j} \cdot \vec{u} \right) \right) d\vec{u} \tag{51}$$

Etudions le deuxième terme de cette expression : posons $\vec{j} \cdot \vec{u} = jucos\beta$ avec β l'angle formé par $\vec{j}$ et $\vec{u}$ alors :

$$\vec{grad} \left(\frac{3}{2c_0} \vec{j} \cdot \vec{u} \right) = \frac{3}{2c_0} j \vec{grad}(ucos\beta) \tag{52}$$

or u et x sont des variables indépendantes, donc $\vec{grad}(u) = 0$ et le terme s'annule.

étudions le 1er terme.

$$\int_{4\pi} c^2 \vec{u} \left(\vec{u} \cdot \vec{grad} \frac{\eta}{\pi} \right) d\vec{u} \tag{53}$$

et posons $||\vec{grad} \frac{\eta}{4\pi}|| \vec{u}_g = \vec{grad} \left(\frac{\eta}{4\pi} \right)$.

$$\int_{4\pi} c^2 \vec{u} \left(\vec{u} \cdot ||\vec{grad} \frac{\eta}{4\pi}|| \vec{u}_g \right) d\vec{u} = \int_{4\pi} c^2 ||\vec{grad} \frac{\eta}{4\pi}|| \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{u}_g) d\vec{u} \tag{54}$$

en developpant :

$$\frac{c^2}{4\pi} ||\vec{grad}\eta|| \int_{4\pi} (\vec{u} \cdot \vec{u}_g) \vec{u} d\vec{u} = \frac{c^2}{4\pi} ||\vec{grad}\eta|| \vec{u}_g = \frac{c^2}{4\pi} \vec{grad}\eta \tag{55}$$

et ainsi nous pouvons conclure que le terme d'advection de l'equation de transfert radiatif, s'écrira, grace à l'approximation dans la base des harmoniques sphériques :

$$\int_{4\pi} c \vec{u} d\vec{u} (\vec{u} \cdot\ \vec{grad} f) \simeq \frac{c^2}{4\pi} \vec{grad}\eta \tag{56}$$

Le modèle macroscopique sous l'hypothèse du proche équilibre

Nous sommes arrivés au bout des developpements de chacun des termes de l'equation de transfert radiatif sommés sur l'espace des vitesses. nous pouvons regrouper les 4 termes et obtenir l'equation finale suivante :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{4\pi} \vec{grad}\eta \simeq -kc_0 \vec{j} + kc_0 g \vec{j} = -kc_0(1-g)\vec{j} \tag{57}$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{4\pi} \vec{grad}\eta + kc_0(1-g)\vec{j} = 0 \tag{58}$$

Nous obtenons donc le système d'équations suivant, liant les 2 observables macroscopique η et $\vec{j}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{4\pi} \vec{grad}\eta + kc_0(1-g)\vec{j} = 0 \end{aligned} \right. \tag{59}$$

La limite diffuse

Pour la suite, nous considérerons que le flux est stationnaire, c'est à dire que nous posons $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = 0$. Le système des deux équations précedentes devient alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}) = 0 \\ \dfrac{c_0^2}{4\pi} gr\vec{a}d\eta + kc_0(1-g)\vec{j} = 0 \end{cases} \tag{60}$$

La seconde équation permet d'exprimer le flux en fonction du gradient de la densité η en accord avec la loi de Fick :

$$\vec{j} = -\frac{c_0}{4\pi k(1-g)} gr\vec{a}d\eta \tag{61}$$

Remplaçons maintenant le flux $\vec{j}$ ainsi obtenu dans l'équation de continuité (la première équation du système des deux équations macrosopiques) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathrm{div}\left(-\frac{c_0}{4\pi k(1-g)} gr\vec{a}d\eta \right) \tag{62}$$

Nous obtenons ainsi l'equation de la diffusion,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{c_0}{4\pi k(1-g)} \nabla^2 \eta \tag{63}$$

que l'on peut aussi noter

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = D\nabla^2 \eta \tag{64}$$

D représentant le *coefficient de diffusion*, soit

$$D = \frac{c_0}{4\pi k(1-g)} \tag{65}$$

? ? ? Reste le 4π qui n'est pas normal ...

0.1 Remarque

Si nous avions pris l'hypothèse de travailler avec une fonction de phase diffusion isotrope et non quelconque, nous aurions eu un coefficient d'asymétrie g égal à 0 (en effet, la moyenne des cosinus des angles de déviation aurait été nulle). Le coefficient de diffusion aurait été $D = \frac{c_0}{4\pi k}$ que l'on peut présenter sous la forme suivante :

$$D = \frac{c_0 \lambda}{\mathcal{D}} \tag{66}$$

où $\lambda = \frac{1}{k}$ est le libre parcours moyen et $\mathcal{D} = 3$ est la dimension du problème.

Cette propriété est généralisable à toute dimension : pour une diffusion particulaire isotrope à vitesse constante, la limite du proche équilibre conduit à une diffusion macroscopique de coefficient égale au produit de la vitesse par le libre parcours moyen, divisé par la dimension du problème.

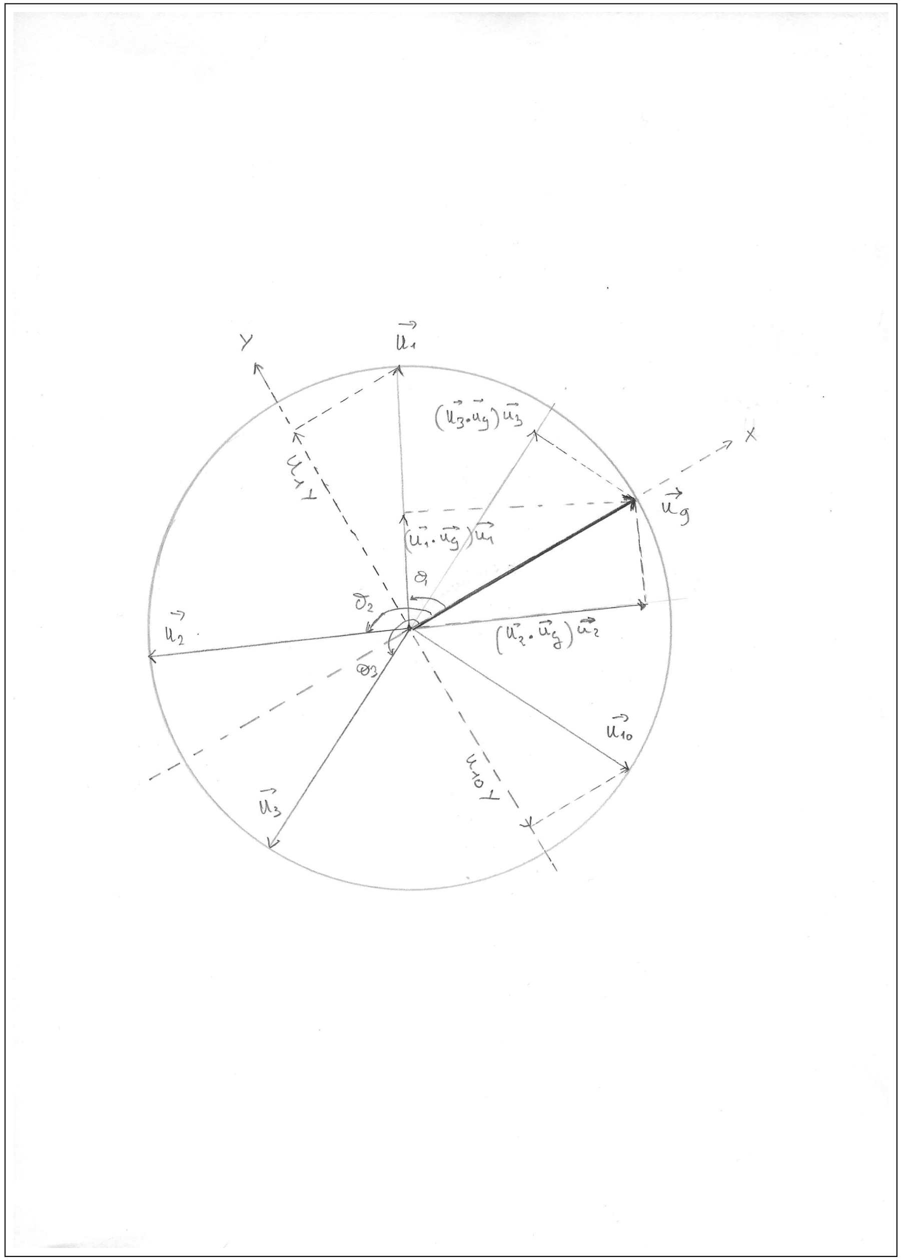

Figure 1 – A écrire ... le caption de la figure.